マイスナー効果を理解するために

磁場と波動方程式

H*=rot *A で定義されるベクトルポテンシャル ***A*** をもちいて磁場中の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2$$

である。ここでSchrodingerのハミルトニアンの運動エネルギーとして

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2$$

を入れることになる。

粒子と電磁場の相互作用の取り扱い(解析力学の復習)

電荷 e を持った荷電粒子が速度 v で運動するとき、電磁場 E、H がこれに及ぼす力は、Lorentz力という。

$$e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)$$

粒子の質量を m、座標を x, y, z とすれば、その運動方程式

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= eE_x+\frac{e}{c}\left(\frac{dy}{dt}H_z-\frac{dz}{dt}H_y\right), \\ \cdots, &\quad \cdots \end{aligned}\right\}$$

と書ける。

E, Hをスカラー φ 、およびベクトル・ポテンシャル**A**で表わすと

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} = -e\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{e}{c}\Big\{&-\frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &+\frac{dy}{dt}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{dz}{dt}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\Big\}, \\ \cdots, &\quad \cdots \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

と書かれる。

前記の運動方程式は、ハミルトニアンとして

$$H=e\varphi+\frac{1}{2m}\left\{\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(p_y-\frac{e}{c}A_y\right)^2+\left(p_z-\frac{e}{c}A_z\right)^2\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

をとったときの正準方程式と同等であることが次に示される。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{1}{m}\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right),\\ &\qquad\cdots,\qquad\qquad\cdots,\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-e\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{e}{mc}\Big\{&\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)\frac{\partial A_x}{\partial x}\\ &+\left(p_y-\frac{e}{c}A_y\right)\frac{\partial A_y}{\partial x}+\left(p_z-\frac{e}{c}A_z\right)\frac{\partial A_z}{\partial x}\Big\},\\ &\qquad\cdots,\qquad\qquad\cdots\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_x}=\dfrac{1}{m}\left(p_x-\dfrac{e}{c}A_x\right),\\ \qquad\cdots,\qquad\quad\cdots,\end{array}\right\}$$

の式から

$$p_x=m\frac{dx}{dt}+\frac{e}{c}A_x,\ \cdots,\ \cdots$$

これを t につき微分すれば、A_x, ･･･が、x, y, z, t の関数であることを考慮して、

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_x}{dt}&=m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}\\&=m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{e}{c}\left\{\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right.\\&\qquad\qquad\left.+\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right\},\\&\qquad\qquad\cdots,\qquad\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

を得る。

一方、(4) の 右辺は、(3) を代入して、

$$\left.\begin{array}{l} -e\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{e}{c}\left\{\dfrac{dx}{dt}\,\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{dy}{dt}\,\dfrac{\partial A_y}{\partial x}+\dfrac{dz}{dt}\,\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots, \qquad \cdots \end{array}\right\} \quad (6)$$

と書かれるから、**(5)**、**(6)** を等しいと置けば、丁度 **(1)** が得られる。

よって、ポテンシャル、φ 、**A** で表せるような電磁場における質量 m, 電荷, e なる粒子に対するハミルトニアンは

$$H=e\varphi+\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$$

で与えられる。

粒子の確率密度と流れの密度（ j ）の保存則の量子力学的取り扱い

$$|\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2 dv$$

Schrodinger　方程式の波動関数を用いて、上記のように、時刻 t に $\underline{\mathbf{r}}$ の位置の微小体積 dv の中に粒子を発見する確率を表せる。

粒子の出入りがあることを考慮し、粒子の流れの密度 j を定義する。 jdS は j の方向と直角ま微小面積 dS を横切る粒子数である。 r に辺が dx, dy, dz である微小な直方体に、上下の面を通しての流れの dt の時間内に流れ込む粒子数の収支は、

$$[j_z(x,y,z) - j_z(x,y,z+dz)]dxdydt = -\left(\frac{\partial}{\partial \cancel{x}\, z} j_z\right) dxdy\, dz\, dt$$

である。 前後、左右の面についても同様にして、全収支と dv の中の粒子の存在確率は等しいので

$$d(|\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2)dxdydz = -\left(\frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z\right) dxdydzdt$$

従って、

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\psi(\boldsymbol{r}, t)|^2) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z\right) = -\mathrm{div}\, \boldsymbol{j} = -\nabla \cdot \boldsymbol{j} \quad (1)$$

を得る。

(1) の左辺は

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2)=\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t))=\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi \quad \textbf{(2)}$$

である。波動関数に時間変化は、**Schrodinger** 方程式で下記のように与えられる。

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi$$

ψ と複素共役な ψ^* については

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi^*+V(\boldsymbol{r})\psi^*$$

これらを **(2)** に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\psi(\boldsymbol{r},t)|^2)=-\nabla\cdot\left(\frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)-\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi\right) \quad \textbf{(3)}$$

となる。

(3) と (1) を合わせると

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi$$

が得られる。これは、量子力学での確率の流れの保存則の一般な式である。
電流は、電荷eをかければ、次のように得られる。

$$\boldsymbol{i} = e\boldsymbol{j} = \frac{e\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^2}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi$$

磁場がゼロの時に、電流は流れていないとすると、上式の第一項は、ゼロとする。磁場があると当然に波動関数は変化し、第2項は、ゼロにならないと同時に、第１項もゼロとならない。

ここで、もし、波動関数が微小な磁場でほとんど変化しないと仮定すると

$$\boldsymbol{i} \cong -\frac{e^2}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi$$

になる。この時に、マイスナー効果が導かれることを示す。

磁場侵入長

アンペールの法則から

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=A\boldsymbol{i}$$

と書ける．cgs ガウス単位系では $A=4\pi$ にとって

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=4\pi\boldsymbol{i}$$

になる．これは電磁気学の Maxwell 方程式の一つである．

ここで，

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\frac{4\pi e^2}{mc}|\psi|^2\boldsymbol{A},\qquad \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}=-\frac{4\pi e^2}{mc}|\psi|^2\boldsymbol{H}$$

が得られる．いま ψ をもっている系が三次元空間の x の正の領域をうずめているとし，x の負の領域は真空で，磁場が z 方向にだけ H_0 でかかっているとすると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_z=\frac{4\pi e^2}{mc}|\psi|^2H_z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z = \frac{4\pi e^2}{mc} |\psi|^2 H_z$$

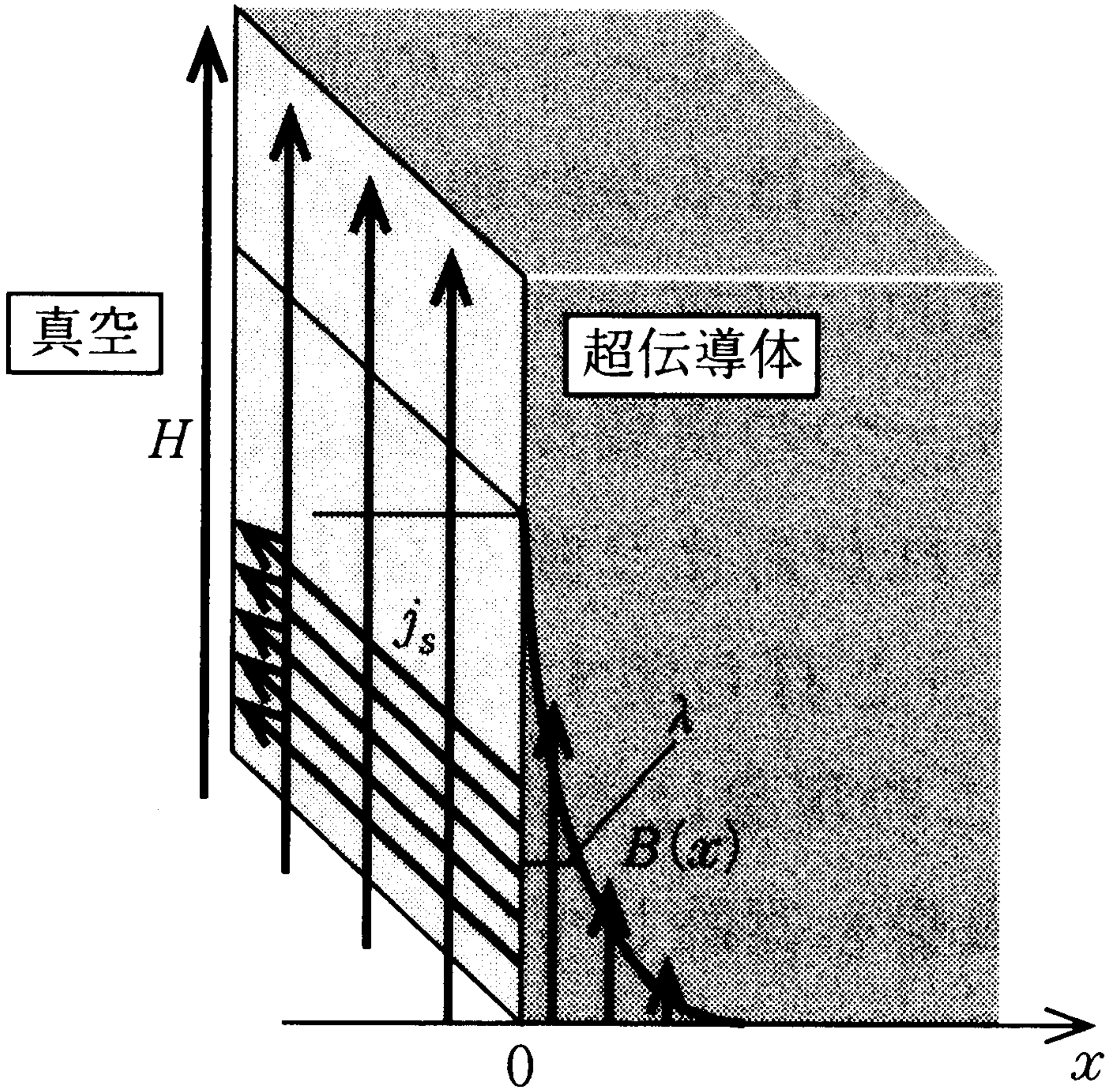
となり，この微分方程式の解は

$$\begin{cases} H_z(x) = H_0 \exp\left(-x\sqrt{4\pi e^2|\psi|^2/mc}\right) & x>0 \\ H_z(x) = H_0 & x<0 \end{cases}$$

であることは代入によって確かめられる．つまり，磁場は系の内部に向か
急速に減少して，ゼロに近づく．$H_z(x)$ が $1/e$ になるのは x が

$$\lambda = \left[\left(\frac{4\pi e^2}{mc}\right)|\psi|^2\right]^{-1/2}$$

のところである．したがって，もし系が λ よりも充分大きければ，磁場
とんど系の中に入れないことになる．すなわち系は完全反磁性を示す．



真空
超伝導体
H
j_s
λ
$B(x)$
0
x

磁場と摂動論

ポテンシャルが時間によっていないときには

$$\psi=f(t)\varphi(\boldsymbol{r}), \qquad f(t)=ce^{-iEt/\hbar}, \qquad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\boldsymbol{r})\right]\varphi(\boldsymbol{r})=E\varphi(\boldsymbol{r})$$

であり，この最後の式は

$$\mathcal{H}\varphi(\boldsymbol{r})=E\varphi(\boldsymbol{r})$$

と書け，これを満足するような不連続な $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ と E_n が固有状態の空間部分とその固有エネルギーである．

そこで，ある系についてハミルトニアンが

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}'$$

と分解でき，$\mathcal{H}_0$ については

$$\mathcal{H}_0\varphi_m=E_m\varphi_m$$

の E_m と φ_m がわかっていて，かつ $\mathcal{H}'$ が小さいときを考える．$\mathcal{H}'$ の小ささの目印として

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\lambda\mathcal{H}'$$

と書き，あとで λ を1にすることにする．解くべき方程式は

$$\mathcal{H}\psi=W\psi$$

であるので W と ψ を λ についてベキ展開して

$$\begin{cases} \psi=\psi_0+\lambda\psi_1+\lambda^2\psi_2+\cdots \\ W=W_0+\lambda W_1+\lambda^2 W_2+\cdots \end{cases}$$

とすると

$$(\mathcal{H}_0+\lambda\mathcal{H}')(\varphi_0+\lambda\psi_1+\cdots)=(W_0+\lambda W_1+\cdots)(\psi_0+\lambda\psi_1+\cdots)$$

λ のベキで分類すると

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0\psi_0=W_0\psi_0 \\ \mathcal{H}_0\psi_1+\mathcal{H}'\psi_0=W_0\psi_1+W_1\psi_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

となる．ここで

$$\psi_1=\sum_n a_n^{(1)}\varphi_n$$

と書き，　$\lambda=0$ のときの ψ_0 を φ_m とすれば

$$\mathcal{H}_0\sum_n a_n^{(1)}\varphi_n+\mathcal{H}'\varphi_m=E_m\sum_n a_n^{(1)}\varphi_n+W_1\varphi_m$$

もう一度（4-1-33）を使って

$$\sum a_n^{(1)}E_n\varphi_n+\mathcal{H}'\varphi_m=\sum_n E_m a_n^{(1)}\varphi_n+W_1\varphi_m$$

$$\sum_n a_n^{(1)}(E_n-E_m)\varphi_n+\mathcal{H}'\varphi_m=W_1\varphi_m$$

ここで

$$\begin{cases} \int \varphi_m^* \varphi_n dv = \delta_{m,n} \\ \delta_{m,n} = 0 \qquad (m \neq n) \\ \delta_{m,n} = 1 \qquad (m = n) \end{cases}$$

(4-1-40) に左から $\overset{\varphi}{\cancel{\psi}}{}_k^*$ をかけて全空間で積分すると

$$\sum_n a_n^{(1)}(E_n - E_m)\delta_{k,n} + \int \varphi_k^* \mathscr{H}' \varphi_m dv = W_1 \delta_{k,m}$$

になる。左からと指定したのは，$\mathscr{H}'$ はただの数ではなく ∇ のような演算子を含んでいるからである.

$$\mathscr{H}_{k,m} = \int \varphi_k^* \mathscr{H}' \varphi_m dv$$

という表記法を使うと

$$\sum_n a_n^{(1)}(E_n - E_m)\delta_{k,n} + \mathscr{H}'_{k,m} = W_1 \delta_{k,m}$$

$k=n$ のとき

$$a_k^{(1)}(E_k - E_m) + \mathscr{H}'_{k,m} = W_1 \delta_{m,k}$$

ここで $k=m$ とすれば

$$W_1 = \mathscr{H}'_{m,m}$$

$k \neq m$ では

$$a_k^{(1)}(E_k - E_m) = -\mathscr{H}_{k,m}'$$

となって $a_k^{(1)}$ がきまる.

したがって λ の一次まででは

$$\psi = \varphi_m + \sum a_n^{(1)} \varphi_n = \varphi_m + \sum_k \frac{\mathscr{H}'_{k,m}}{E_m - E_k} \varphi_k$$

したがって λ の一次まででは

$$\psi=\varphi_m+\sum a_n^{(1)}\varphi_n=\varphi_m+\sum_k\frac{\mathcal{H}'_{k,m}}{E_m-E_k}\varphi_k$$

となる．上ではもとの方針通り $\lambda=1$ とおいた．$\mathcal{H}'\to 0$ で $\psi=\varphi_m$ にならなくてはいけないという条件から (4-1-48) の和のうち $k=m$ は除外しなくてはならない．つまり $a_m^{(1)}=0$ である†．そこで結局第一近似として

$$W\cong E_m+\mathcal{H}'_{m,m}$$

$$\psi\cong\varphi_m+\sum_{k\neq m}\frac{\mathcal{H}'_{k,m}}{E_m-E_k}\varphi_k$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+V(r)\cong\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\nabla^2-\frac{e}{2mc}\left(\frac{\hbar}{i}\right)(\boldsymbol{A}\cdot\nabla+\nabla\cdot\boldsymbol{A})+V(r)$$

磁場中での摂動項は、以下に与えられる。

$$-\frac{e\hbar}{2mci}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla+\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

この摂動によって、波動関数が変化しない条件は、基底状態とエネルギーの高い固有状態にエネルギーギャップがあることである。

問題3

（1）を使って（3）式を計算し、

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e}{mc} \boldsymbol{A} \psi^* \psi$$

となることを示せ。

問題4

マイスナー状態で磁場が $H_z(x) = H_0 exp(-x/\lambda)$ となる。

この時、表面を流れる超伝導電流を求めよ。