マクロな量子効果ー波動関数の位相ー

シュレディンガー方程式の解の時間に依存する部分は

$$f(t)=c\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

であった．ここで時間に依存しない定数 θ を使って

$$f'(t)=f(t)e^{i\theta}$$

物理量を計算するときには、この不定さは結果に影響を及ぼさない。例えば粒子を発見する確率は、

$$e^{-i\theta}\psi^*(\boldsymbol{r},t)e^{i\theta}\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)$$

で θ は消える。 しかし、粒子が多くなると θ は重大な働きをする。

N 個の多数の Fermi 粒子からなる系の波動関数は上の考察から

$$\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_p(-1)^pP\varphi_1(\boldsymbol{r}_1)\varphi_2(\boldsymbol{r}_2)\cdots\varphi_N(r_N)$$

ここで、P は、r を入れ換える操作を意味し、p はr を何回入れ換えたかの数である。位相の不定を取り入れて$\varphi(r)$ を

$$e^{i\theta}\varphi(\boldsymbol{r})$$

と書きなおすと

$$\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_p(-1)^p\exp\left(\sum_N i\theta_N\right)P\varphi_1(r_1)\varphi_2(r_2)\cdots\varphi_N(\boldsymbol{r}_N)$$

になり θ_N がきまらないかぎり $\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ の位相もきまらない．

すでに、議論したようにクーパー対は、大体 10^{21}個程度になる。そこで、まず二つのクーパー対が重なった場合を考える。クーパー対のエネルギーは、フェルミエネルギーから計って、

$E=-2\hbar\omega_D e^{-2/N(\varepsilon_F)|V|}$ で与えられる。

クーパー対の波動関数の時間変化する部分は、*exp* $[-i(E/\hbar)t+i\theta_1]$ になる。θ_1 は不定な位相である。振動数 $(E/\hbar)$ は対を作る二つの電子が、引力によって起こる相対運動の振動である。

第2のクーパー対の波動関数の時間変化する部分も、

exp [-i(E/ħ)t+iθ_2] になる。エネルギーは、フェルミエネルギーから計って、同じである。引力の原因は、イオンの振動である。クーパー対が重なっていると、おのおのの対が束縛されているために使っているイオンの振動は同じものである。2組の相対運動は、同じ位相で行われるとき、全体のエネルギーが最も低くなる。T=0 つまり系がさらに多くなり、沢山のクーパー対が重なり合いながら空間をうずめつくしているときには、全対の位相がそろってしまう。 そこで波動関数は、

$$\varphi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_{N/2}) = e^{i\theta}\cdot\sum(\text{空間部分})$$

のように単一の位相で書けるようになる。 ここで空間座標は、対の重心の座標である。多くの対が重なっているので、重要なのはマクロな数の対の位相がユニークに決まっていることで、空間座標に関する部分は、考えないことにする。 このように位相が決まっている全体の対を考えると、一つの対の束縛エネルギーは、

$$E= -2\hbar\omega_D e^{-2/N(\varepsilon_F)|V|}$$

波動関数は、上式のように書けるということは、あたかも全系が1個の粒子からできていると考えてもよいことを意味する。しかも、最低エネルギーとその次のエネルギーの間には、有限のギャップがある。すなわち、多数のクーパー対からなる系（超伝導体）では、波動関数が硬い（磁場によって変化しない）。従ってマイスナー効果が生じる。 このように超伝導体の波動関数は、単一の位相 θを使って、

$$\varphi = e^{i\theta}\sqrt{\rho}$$

の形に書ける。 ここで ρ は $\varphi^*\varphi = \rho$

であり、クーパー対の密度である。場所や時間に依存しない。θ は時間変化は別として、磁場が存在しない限り、空間的に一様である。クーパー対の束縛エネルギーは、対の重なりによって同じ位相で振動するために大きくなっている。有限温度では、exp(E/k_BT) に比例して、対の数が減少すると、束縛エネルギーは減少し、さらに対が減少する効果がなだれ現象的に生じ、ある転移温度で、E がゼロになってしまう。その温度が、T_c である。 正確には、 $k_BT_c = 1.764\,|E_0|$ある。

磁束の量子化

超伝導体の波動関数は、$\varphi = e^{i\theta}\sqrt{\rho}$

これを電流の式　$i = ej = \dfrac{e\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \dfrac{e^2}{mc}A\psi^*\psi$

に代入するとクーパー対(2eと置き換える)の電流密度は

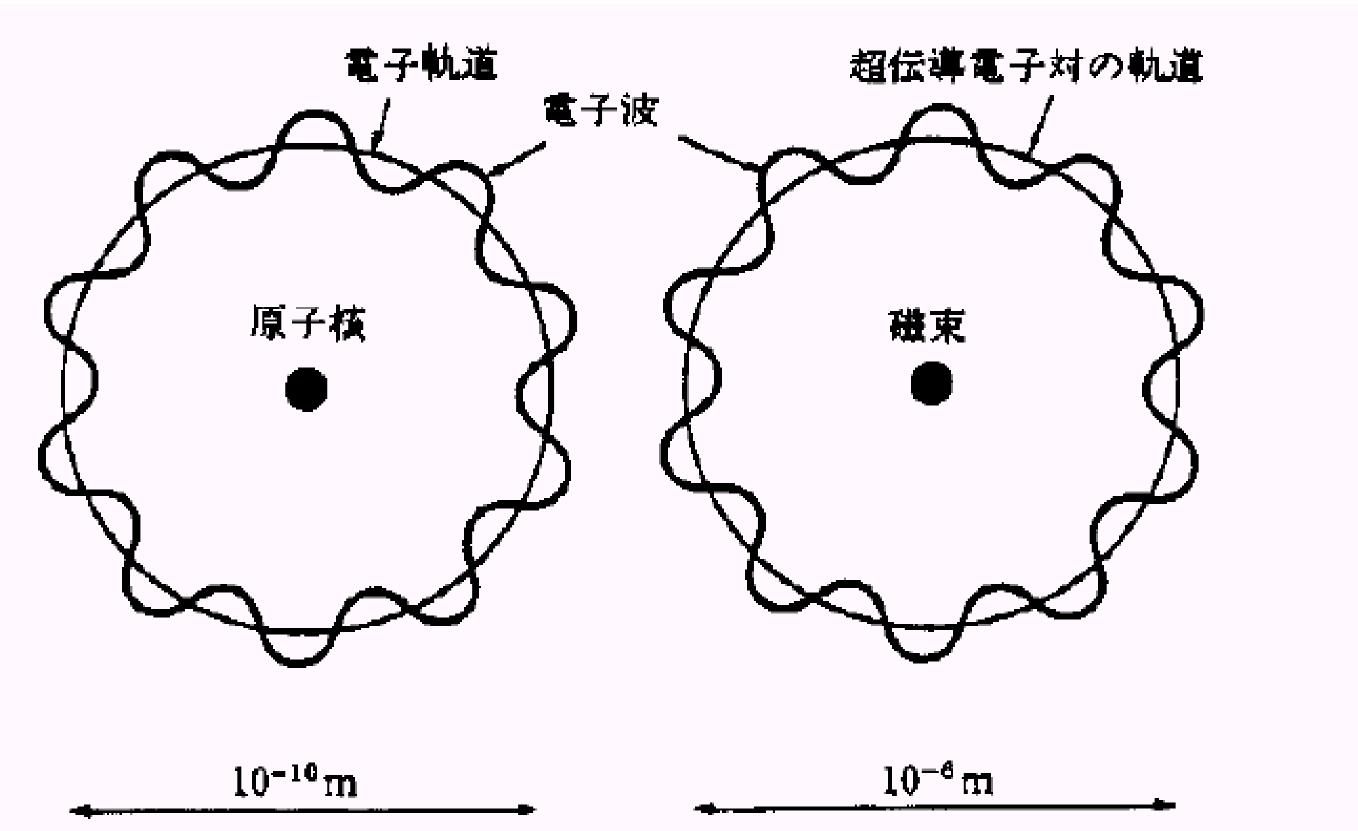
$$i = \frac{2e}{m}\rho\left(\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}A\right)$$

$\nabla\theta = 0$　から

$$i = -\frac{4e^2}{mc}\rho A$$

磁場中に置かれたドーナツ型超伝導体がT_c 以下になった後、磁場をきり、磁束が中空に閉じ込められている場合を考える。

ドーナツ型超伝導体と原子の電子状態との比較



ドーナツ型超伝導体で中空に磁束が捕捉されているときは、θ は空間変化していると仮定する。 ドーナツ型超伝導体を1周して初めの点に戻った時に波動関数は、もと通りにならなければいけないから、1周したときの θ の変化は、$2n\pi$ でなければならない。なぜなら、

$$e^{i\theta}\sqrt{\rho}=e^{i(\theta+2n\pi)}\sqrt{\rho}$$ あるいは、このことは

$$\oint\nabla\theta\cdot d\boldsymbol{l}=2n\pi$$ とも書ける。dl はドーナツを1周する積分路に沿った微小ベクトルであり、

$\oint$ はドーナツを1周する積分を示す。

$$\boldsymbol{i}=\frac{2e}{m}\rho\left(\hbar\nabla\theta-\frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)$$ を同じ経路で積分し、$\oint\nabla\theta\cdot d\boldsymbol{l}=2n\pi$ を使うと

$$\frac{mc}{(2e^2)\rho}\oint\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{l}+\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=n\left(\frac{hc}{2e}\right)$$ となる。

ところで、ドーナツの太さが、磁場侵入長 λ の深さよりも充分大きいときには、Meissner (マイスナー) 効果によってドーナツの中味には磁場はない。 磁場は表面を流れる電流によって遮蔽されている。すなわち電流は、磁場侵入長の深さ程度のごく表面だけに流れている。 そこで、積分路を充分ドーナツの中味の所を通るようにとると

$$\frac{mc}{(2e^2)\rho}\oint\boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{l}+\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=n\left(\frac{hc}{2e}\right)$$ の左辺第1項は無視できる。

左辺の第2項は $\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\boldsymbol{H}\cdot dS$ になる。

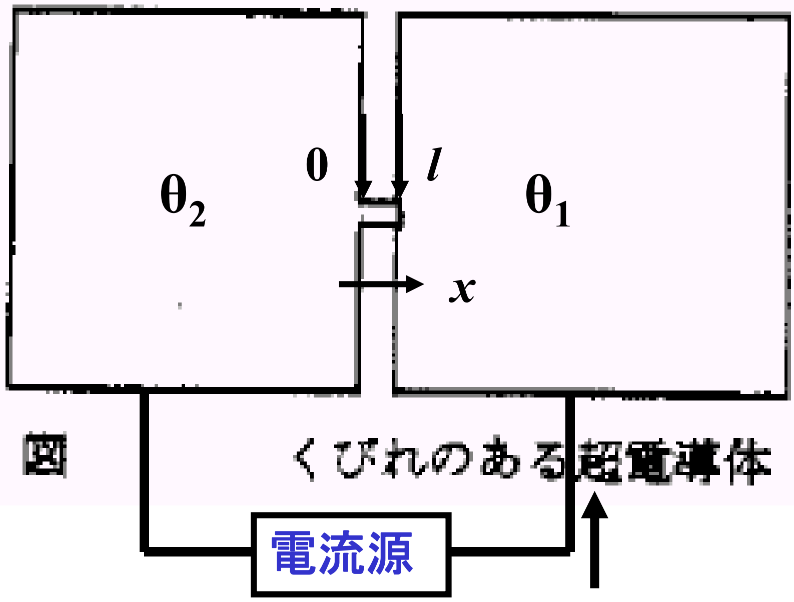
$\int_S\boldsymbol{H}\cdot dS$ は $\oint$ の積分経路で囲まれる面積の中の磁束である。

$\boldsymbol{\Phi}=\int_S\boldsymbol{H}\cdot dS$ 従って $$\boldsymbol{\Phi}=n\left(\frac{hc}{2e}\right)$$ となり、磁束の量子化と呼ぶ。

Cooper 対の位相がそろっていることが磁束の量子化を生むことを見たが, この位相がさらにあからさまに顔を出す現象を見てみよう.

ジョセフソン効果

ー量子干渉磁束計（SQUID）の原理ー



$$i=\frac{2e}{m}\rho\left(\hbar\nabla\theta-\frac{2e}{c}A\right)$$

$$i=\frac{2e\hbar}{m}\rho\frac{(\theta_1-\theta_2)}{l}$$

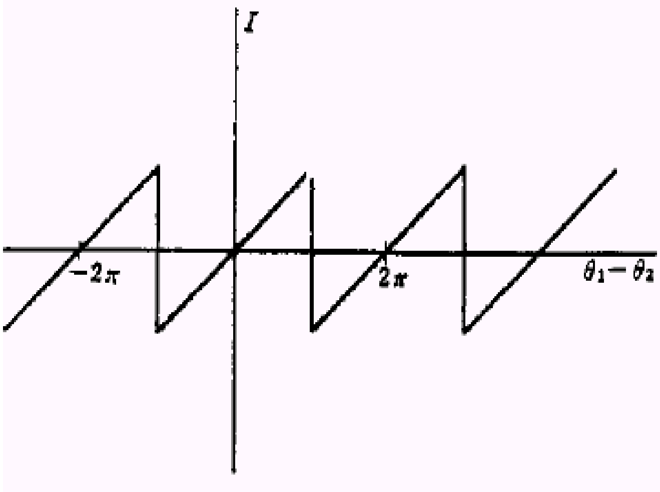
$$I=\frac{\pi r^2}{l}\,\frac{2e\hbar(\theta_1-\theta_2)}{m}$$

$$\varphi=\exp i[(\theta_1-\theta_2)x/l+\theta_2]\sqrt{\rho}$$

$(\theta_1-\theta_2)$ と $(\theta_1-\theta_2+2n\pi)$ は常に同じ物理量を与えなければならないから電流 I は上式のままではなく $(\theta_1-\theta_2)=\Delta\theta$ と書くと右図のようになる必要がある。I は 2π を周期として、かつ$\Delta\theta$ に関して奇関数である。

そのような関数は、一般に

$$I(\Delta\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(n\Delta\theta)$$



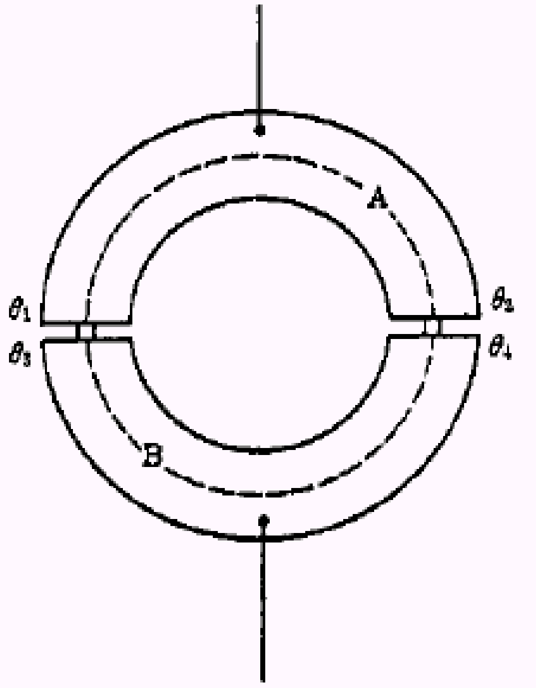
I と $(\theta_1-\theta_2)$ の関係

図のような関数を実際に展開すると係数の中で最も大きいのは、

n=1 の場合である。 第1近似として

$$I\cong\frac{\pi r^2}{l}\,\frac{2e\hbar}{m}\sin\Delta\theta$$

直流ジョセフソン効果と呼ぶ。



二つのくびれをもった
ドーナツ状超伝導体

ドーナツの太い部分に積分路をとると

$$\begin{cases} \theta_1-\theta_2=\dfrac{2e}{\hbar c}\displaystyle\int_A \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \\ \theta_3-\theta_4=\dfrac{2e}{\hbar c}\displaystyle\int_B \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \end{cases}$$

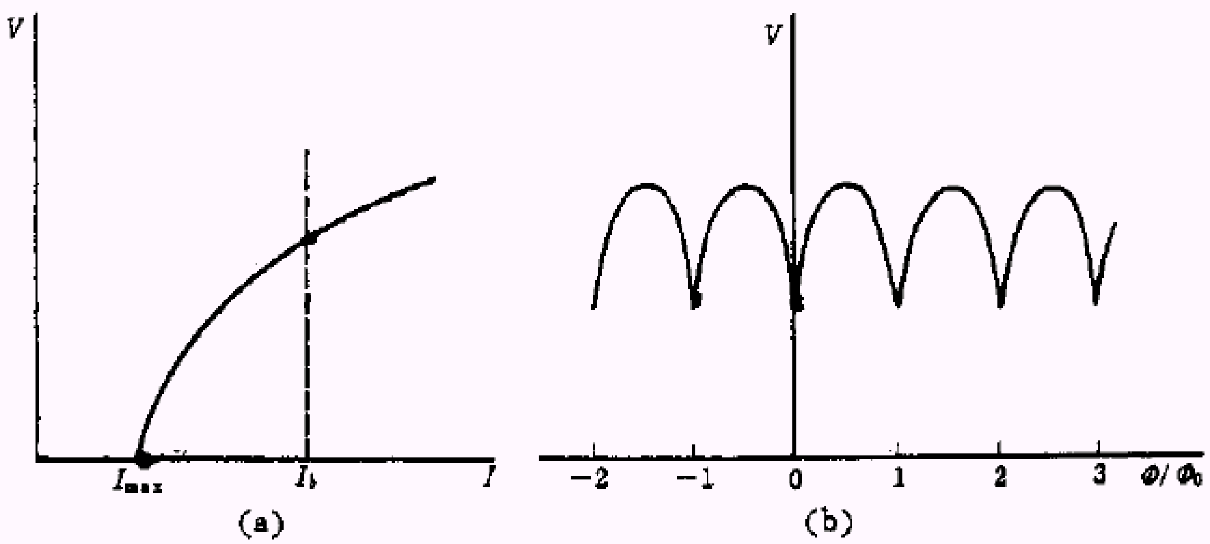
$$(\theta_1-\theta_3)-(\theta_2-\theta_4)=\frac{2e}{\hbar c}\Phi$$

太い部分 A から太い部分 B に流れる全電流は

$$I=I_0(\sin(\theta_1-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_4))$$

外部から電流を流したとき電圧を生じない最大

$$I_{\max}=2I_0\left|\cos\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|$$



バイアス電流 I_b のかけかた（a）と，磁場に対する
電圧の振舞い（b）

SQUID (superconducting quantum interference device)

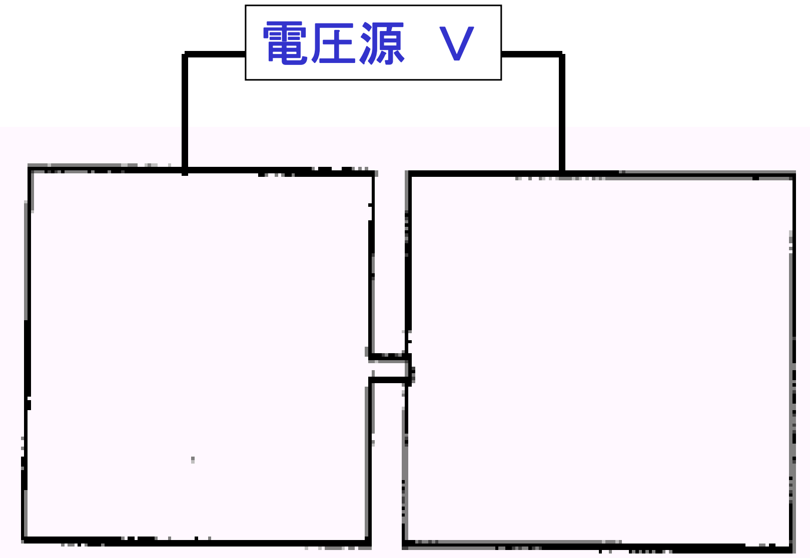


図　くびれのある超電導体

電圧を V とすると二つの太い部分でのクーパー対のエネルギーは、$-2eV$ だけずれる。 波動関数の時間変化は、

$$\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$ である。

二つの太い部分の波動関数の位相差は

$$\Delta\theta=\theta_1-\theta_2=\frac{2eV}{\hbar}t$$

$$I=I_0\sin\Delta\theta$$

一定の電圧を与えると交流が流れる

$$I=I_0\sin\left(\frac{2eV}{\hbar}t\right)$$

周波数が 10^{10} Hz に対応する電圧は約 22μV

交流ジョセフソン効果と呼ぶ。

問題９

超伝導体の波動関数 $\varphi = e^{i\theta}\sqrt{\rho}$ を電流の式

$$\boldsymbol{i} = e\boldsymbol{j} = \frac{e\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^2}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi$$

に代入するとクーパー対（2eと置き換える)の電流密度は

$$\boldsymbol{i} = \frac{2e}{m}\rho\left(\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)$$ と表せることをしめせ。また

ドーナツ型超伝導体で中空に磁束が捕捉されて、θ は空間変化している時には

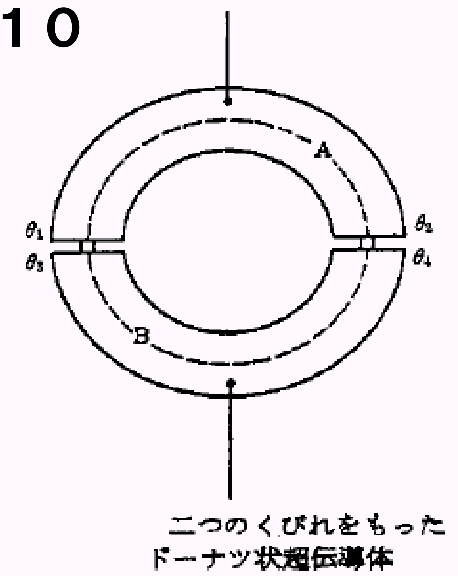
$e^{i\theta}\sqrt{\rho} = e^{i(\theta+2n\pi)}\sqrt{\rho}$ の関係からドーナツを１周する積分路をとると、

$\oint \nabla\theta \cdot d\boldsymbol{l} = 2n\pi$ の関係が得られる。 $\oint$ はドーナツを１周する積分を示す。

$$\boldsymbol{i} = \frac{2e}{m}\rho\left(\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\right)$$ を同じ経路で積分し、

$$\frac{mc}{(2e^2)\rho}\oint \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{l} + \oint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = n\left(\frac{hc}{2e}\right)$$ の関係式が導けることを示せ。

問題１０



ドーナツの太い部分に積分路をとると

$$\begin{cases} \theta_1 - \theta_2 = \dfrac{2e}{\hbar c}\displaystyle\int_A \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \\ \theta_3 - \theta_4 = \dfrac{2e}{\hbar c}\displaystyle\int_B \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \end{cases}$$

$$(\theta_1 - \theta_3) - (\theta_2 - \theta_4) = \frac{2e}{\hbar c}\Phi$$

太い部分 A から太い部分 B に流れる全電流は

$$I = I_0(\sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_4))$$

外部から電流を流したとき電圧を生じない最大 の電流が

$$I_{\max} = 2I_0\left|\cos\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|$$ と与えられることを確かめよ。