臨界電流

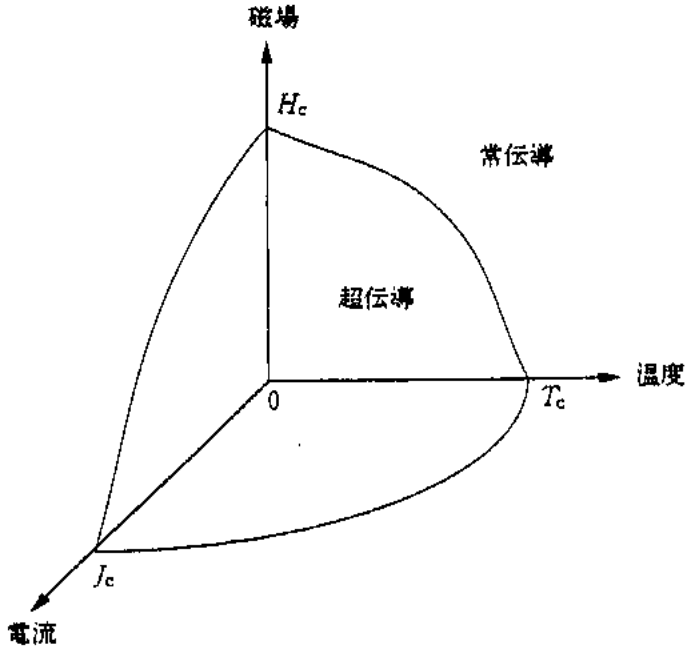


図　超伝導状態を保つためには，温度，磁場，電流値にそれぞれ限界が存在する．これら限界値を，臨界温度，臨界磁場，臨界電流と呼び，超伝導と常伝導の境界面を臨界面と呼んでいる．熱力学的には，臨界面の内側では超伝導状態の自由エネルギーが常伝導状態よりも低い．

超伝導の現象論（ギンツブルグーランダウ方程式）

常伝導から超伝導へは2次の相転移である。超伝導転移温度（T_c）では、ギブスの自由エネルギー（G）は、$G_s = G_n$であり、$T < T_c$では、$G_s < G_n$となる。T_c近傍では、G_sとG_nの差はごくわずかであるので、以下のような展開が可能となる。

$$G_s = G_n + \alpha f^2 + (\beta/2) f^4 + (\gamma/6) f^6 + \cdots\cdots$$

ここで、G_n以降の項が正であれば、常伝導が安定であり、負であれば超伝導が安定となる。fは秩序パラメーターと呼ばれ、秩序の度合いを示す。T_c近傍では、fは小さいので、第2項のみ残す。

$$G_s - G_n = \alpha f^2 + (\beta/2) f^4 \quad (1)$$

超伝導では、fは、$f^2 = |\Psi|^2 = n_s(T)/n_s(0)$

ここで、$n_s(T)$ は温度 T における超伝導電子密度、$n_s(0)$ は絶対温度における超伝導電子密度である。したっがて、Ψ は超伝導の波動関数で、$|\Psi|^2$ は超伝導の相対密度である。

ここで、$G_s - G_n$ を $|\Psi|^2$ の関数として、この値が極小になるような条件が、$|\Psi|^2$ の平衡値である。 この条件は、

$$\partial(G_s - G_n)/\partial|\Psi|^2 = 0$$

であるから

$$\alpha(T) + \beta(T)|\Psi|^2 = 0$$

よって

$$|\Psi|^2 = -\alpha(T)/\beta(T)$$

前式（1）に代入すると次式が得られる。

$$G_s - G_n = -(1/2)\alpha^2(T)/\beta(T)$$

$G_s - G_n = -(1/2)H_c^2$ であるので

$H_c^2(T) = \alpha^2(T)/\beta(T)$ を得る。

$\lambda^2(T) = 1/[e^{*2} n_s(T)/m^*]$ から

$\lambda^2(T)/\lambda^2(0) = n_s(0)/n_s(T)$

$|\Psi|^2 = -\alpha(T)/\beta(T) = n_s(T)/n_s(0)$

$\alpha(T) = -H_c^2(T)/|\Psi|^2 = -H_c^2(T)\cdot[n_s(0)/n_s(T)]$

$= -H_c^2(T)\cdot[\lambda^2(T)/\lambda^2(0)]$

$\beta(T) = \alpha^2(T)/H_c^2(T) = H_c^2(T)\cdot[\lambda^4(T)/\lambda^4(0)]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_z = \frac{4\pi e^2}{mc} |\psi|^2 H_z$$

となり，この微分方程式の解は

$$\begin{cases} H_z(x) = H_0 \exp\left(-x\sqrt{4\pi e^2|\psi|^2/mc}\right) & x>0 \\ H_z(x) = H_0 & x<0 \end{cases}$$

であることは代入によって確かめられる．つまり，磁場は系の内部に向か
急速に減少して，ゼロに近づく．$H_z(x)$ が $1/e$ になるのは x が

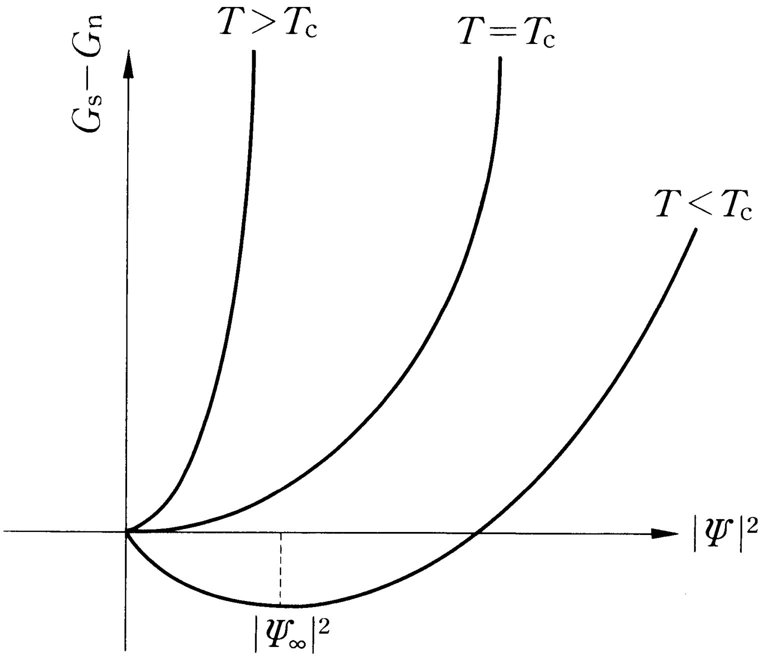
$$\lambda = \left[\left(\frac{4\pi e^2}{mc}\right)|\psi|^2\right]^{-1/2}$$

のところである．したがって，もし系が λ よりも充分大きければ，磁場
とんど系の中に入れないことになる．すなわち系は完全反磁性を示す．

GL 方程式の展開係数、$H_c(T)$，$\lambda(T)$ は測定できる値である。

$$G_s = G_n + \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4$$

この関係式は、下図のような温度依存性と$|\Psi|^2$ に対する変化。



臨界電流

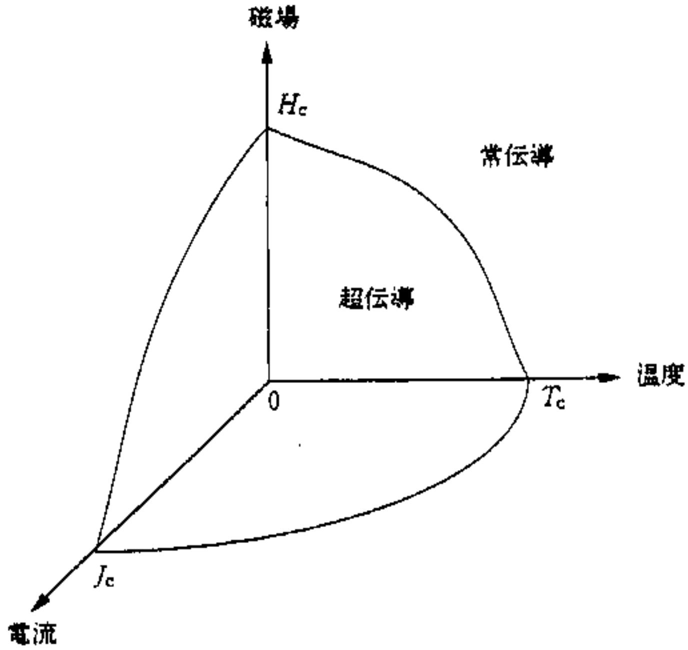


図　超伝導状態を保つためには，温度，磁場，電流値にそれぞれ限界が存在する．これら限界値を，臨界温度，臨界磁場，臨界電流と呼び，超伝導と常伝導の境界面を臨界面と呼んでいる．熱力学的には，臨界面の内側では超伝導状態の自由エネルギーが常伝導状態よりも低い．

下図に示すように、超伝導電流が流れる状態というのは、運動量空間において、電流に相当する分だけ、原点からこの分布が電流方向に移動することに対応し、クーパー対の平均運動量がゼロでなくなることに対応する。 この運動エネルギーの増加分が凝集エネルギーよりも大きくなると、常伝導に転移する。

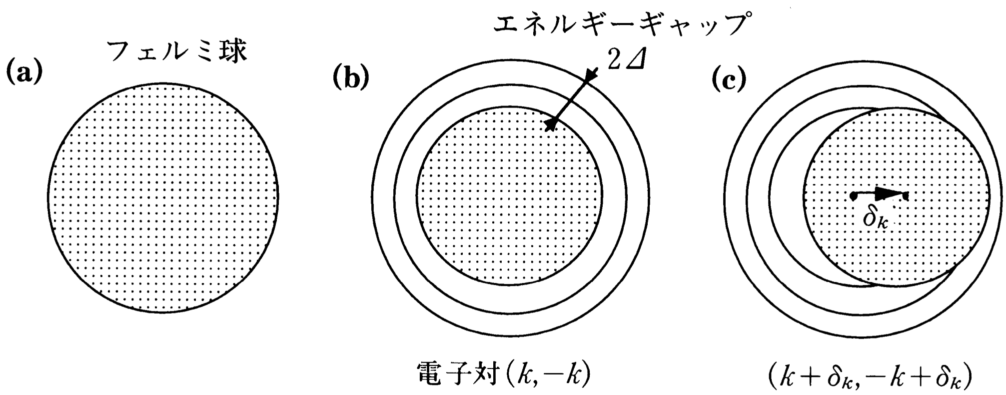


図 8-1　フェルミ球と臨界電流(対破壊電流)．

（a）自由電子モデルのフェルミ球．

（b）超伝導状態のフェルミ球．E_F-Δ のレベルにボーズ凝縮し，2Δ だけのエネルギーギャップが生じる．

（c）超伝導状態で電流を流すと電子系の運動量が電流方向にずれる．このずれが，エネルギーギャップを超えると，超伝導が不安定となり常伝導に転移する．半導体などでもエネルギーギャップが生じるが，この場合はブリルアンゾーンにギャップ端が固定され自由に動けない．

この限界の電流は、対破壊電流と呼ばれる。この対破壊電流をGL理論を使って求める。

$$G_s = G_n + \alpha|\Psi|^2 + (\beta/2)|\Psi|^4 + \underbrace{(1/2)|\Psi|^2 m^* v_s^2}_{\text{超伝導電子の運動エネルギー}}$$

電流密度は、以下で与えられる。

$$J = |\Psi|^2 e^* v_s$$

ここで、G_s が極小となるような $|\Psi|^2$ を もとめれば、電流を流したときの、最も安定な状態が得られる。

$\partial(G_s - G_n)/\partial|\Psi|^2 = 0$ から，$|\Psi|^2$ を求めると

$$|\Psi|^2 = |\Psi_\infty|^2[1 + (m^* v_s^2/2\alpha)]$$

電流の式を使うと

$$J = e^*|\Psi_\infty|^2[1 + (m^* v_s^2/2\alpha)]v_s$$

$|\Psi_\infty|^2$ は、電流を流していないときの超伝導電子密度。

ここで、J を v_s の関数とみて、J が最大となる条件を考えると、$m^* v_s^2 = -(2/3)\alpha$ であり、よって

$$J_c = e^*|\Psi_\infty|^2(2/3)(-2\alpha/3m^*)^{1/2}$$

$\alpha(T) = -H_c^2(T)/|\Psi_\infty|^2 = -H_c^2(T)/n_s(T)]$　の関係から

$$J_c = e^*|\Psi_\infty|^2(2/3)^{3/2}\ \{H_c^2(T)/[n_s(T)m^*]\}^{1/2}$$

$|\Psi_\infty|^2 = n_s(T)$ として

$$J_c = (2/3)^{3/2} H_c(T)/\lambda(T) \cong 0.54\, H_c/\lambda$$

臨界電流密度はどの程度の値か？

例えば，H_c として 0.1 T という比較的小さな値をとり，λ として大きな値である 1 μm を仮定しても，J_c として 8×10^{11} A/m^2 というような大きな値が得られる．通常の応用では，これだけ限界値が高ければ全く問題がない．

臨界磁場による臨界電流

電流 I を流すと必ず磁場 H が発生する。半径を r とすると外周部では

$$H = I/(2\pi r)$$

で表される。この磁場が H_c に達すると、超伝導は壊れる。

第1種超伝導体では、半径 1 mm の超伝導線では、約 50 A(アンペア)程度である。この値は、上述した対破壊電流に比べると6桁も小さい。

第2種超伝導体の混合状態での電流（応用化のキーポイント）

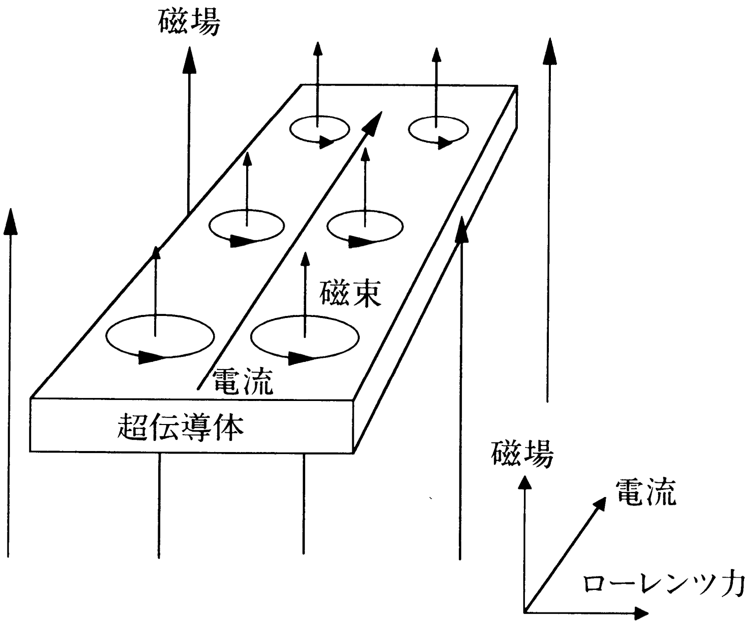
電流によって量子化磁束に作用するローレンツ力

$$f_{\mathrm{L}} = I\Phi_0$$

超伝導体内に単位面積あたり n 個の磁束がある場合のローレンツ力 F_L は

$$F_L = IB \ (B = n\Phi_0)$$

で与えられる。



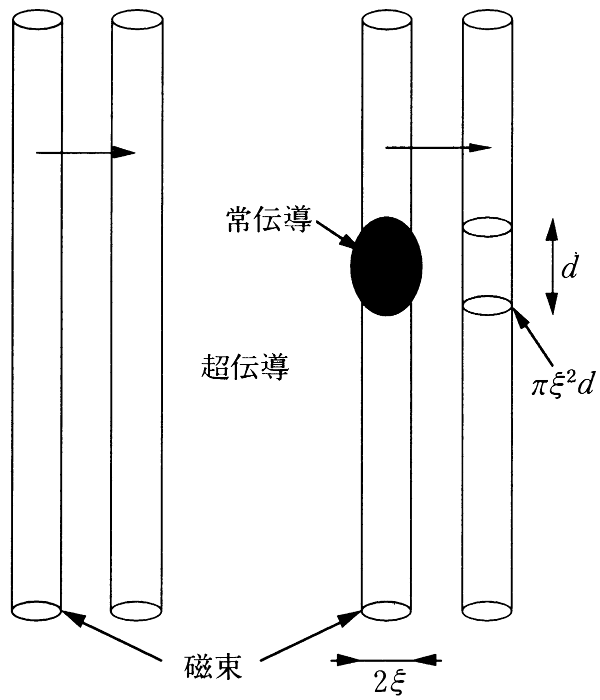
磁束が動くということは，磁束の中の常伝導電子が動くということであるから，損失が生じることになる．また，ベクトルで考えて

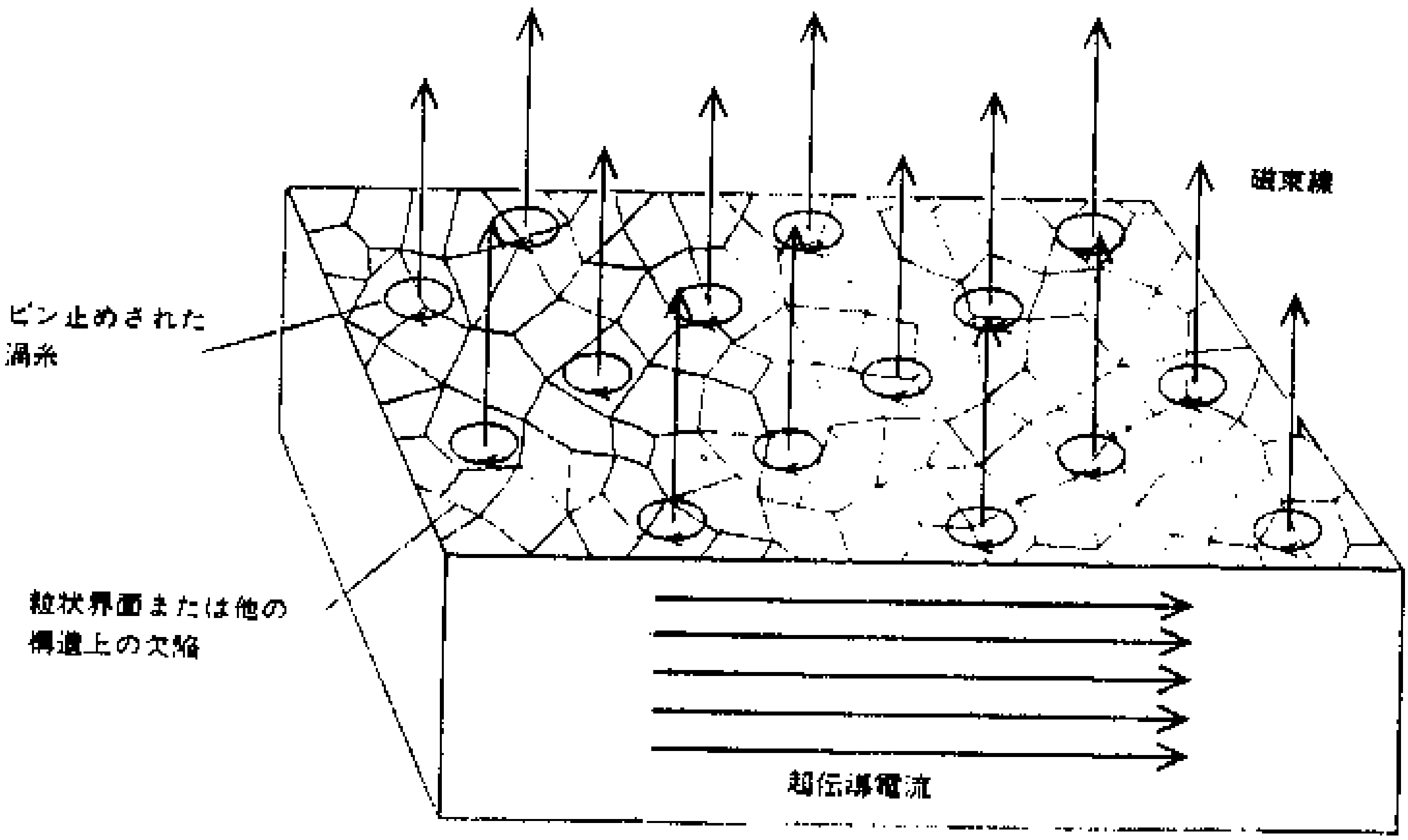
$$F_{\mathrm{L}} = eE = ev\times B,\quad E = v\times B$$

以上の関係から、丁度磁場の方向 (B) と磁束の中の常伝導電子が動く方向 (v) の垂直方向、すなわち電流と同じ方向に電位差 E が発生する。これは、混合状態では、電流そのものの抵抗ゼロの超伝導電流であるにもかかわらず、電流抵抗が発生する。この磁束が運動することによって発生するるので、磁束流抵抗と呼ばれる。

混合状態においては、磁束線をピン止めしないと電気抵抗はゼロにならない。

右図のように超伝導体内に常伝導部分があるとその部分では、磁束がきてもエネルギーの上昇がない。逆に磁束がこの部分からはずれる際には、超伝導を$\pi\xi^2 d$ の体積だけ壊す必要があるため、このため磁束は、常伝導部から動き難い。これをピニング効果を生む。





高磁界電流タイプII超伝導体

問題１３

$$J_c = e^*|\Psi_\infty|^2(2/3)^{3/2}[\quad H_c^2(T) \qquad /n_s(T)m^*]^{1/2}$$

$|\Psi_\infty|^2 = n_s(T)$ として

$$J_c = (2/3)^{3/2}H_c(T)/\lambda(T) \cong 0.54H_c/\lambda$$

を示し、半径 r の超伝導線の対破壊電流　J_c とするとき、H_c と以下の関係があることを示せ。

$$J_c = I_c/\pi r^2 = 2H_c/r$$

また、銅線の半径をどの程度まで、細くできるかを示せ。